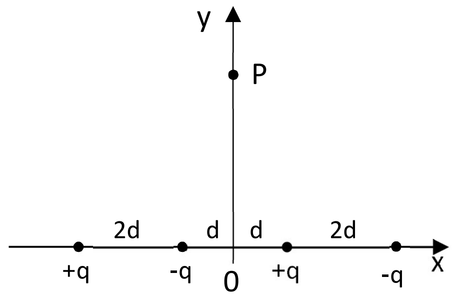
Esercizio n.1 **[10 punti]**

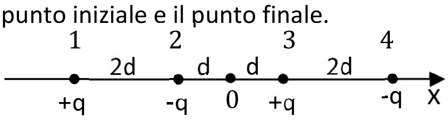
Nel piano x,y sono presenti quattro cariche elettriche puntiformi q, uguali in valore assoluto, di cui due positive e due negative, disposte lungo l'asse x come in figura. A) Scrivere l'espressione e calcolare il lavoro necessario per portare le cariche dall'infinito fino alla configurazione indicata. B) Determinare, se esiste, la posizione del punto P sull'asse delle y dove il campo elettrico creato dalle cariche è nullo.



Dati: q = 1/3 μC ; d = 1 cm

Soluzione

A) Il lavoro necessario per portare le cariche nella configurazione indicata sarà L= ΔU; ΔU essendo la variazione di energia potenziale del sistema fra il punto iniziale e il punto finale.
Posso scrivere l'energia potenziale delle cariche avendole chiamate 1,2,3,4:



Avrò, assumendo nullo il potenziale all'infinito: $U(1) = 0$; $U(2) = -\frac{kq^2}{2d}$; $U(3) = -\frac{kq^2}{2d} + \frac{kq^2}{4d}$

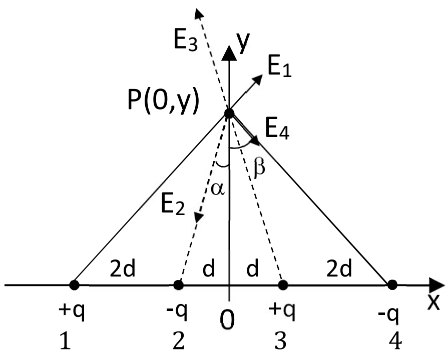
$U(4) = -\frac{kq^2}{6d} + \frac{kq^2}{4d} - \frac{kq^2}{2d}$; in totale quindi: $L = U_{TOT} = \sum_{i=1}^{i=4} U(i) = \frac{kq^2}{d}\left[-\frac{7}{6}\right] = -10^{-1} \cdot \frac{7}{6} \cong -0{,}1\,J$ $\therefore$

NOTA: volendo schematizzare il sistema come due dipoli, intanto va calcolato il lavoro necessario per creare i due singoli dipoli, poi va calcolata l'energia di interazione. E in ogni caso per l'energia di interazione (il lavoro per portare i due dipoli nella configurazione finale) non si può utilizzare la formula per il potenziale del dipolo $V(p,r) = k\,q\bar{\delta} \cdot \bar{r}/r^3$ che vale solo quando r>>δ. I dipoli sono molto vicini. Quindi si ritorna a dover utilizzare l'espressione completa per una coppia di cariche.

B) I campi $\bar{E}$ creati dalle due coppie +q e -q sono tali che la componente y sarà sempre nulla (vedi figura), rimane la componente x.
Avremo:

$E_x(2;3) = 2\,E(P)sin\alpha = \frac{2kq}{(d^2+y^2)}\,sin\alpha \qquad < 0$

$E_x(1;4) = 2\,E(P)sin\beta = \frac{2kq}{(9d^2+y^2)}\,sin\beta \qquad > 0$



Il campo sarà nullo se i due campi E_x saranno uguali in modulo, essendo di segno opposto, quindi se:

$$\frac{2kq}{(d^2+y^2)}\,sin\alpha = \frac{2kq}{(9d^2+y^2)}\,sin\beta \qquad [1]$$

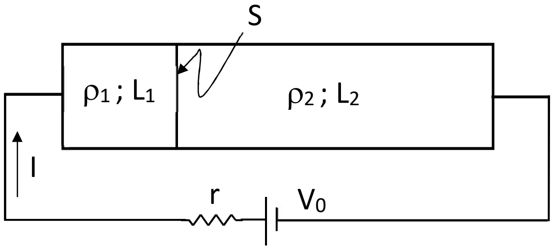
Scrivendo : $sin\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+y^2}}$ e $sin\beta = \frac{3d}{\sqrt{9d^2+y^2}}$ abbiamo che la relazione [1] diventa:

$$\frac{1}{(d^2+y^2)}\frac{1}{\sqrt{d^2+y^2}} = \frac{1}{(9d^2+y^2)}\frac{3}{\sqrt{9d^2+y^2}} \quad \text{ossia:} \quad \frac{1}{(d^2+y^2)^{3/2}} = \frac{3}{(9d^2+y^2)^{3/2}}$$

che porta all'equazione: $9d^2 + y^2 = 3^{2/3} \cdot d^2 + 3^{2/3} \cdot y^2 \;\rightarrow\; 9d^2 + y^2 = 2 \cdot d^2 + 2 \cdot y^2$

(avendo assunto che $3^{2/3} \cong 2$) , $\rightarrow y^2 = 7d^2$; quindi $y = \pm d\sqrt{7} \cong \pm 2{,}6\,d = \pm 2{,}6\,cm$ $\therefore$

Esercizio n.2 **[10 punti]**



Si consideri un sistema composto da due conduttori metallici, disposti in serie, di resistività ρ_1 e ρ_2, lunghezza $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ ed uguale sezione **S**. Il sistema è collegato ad un generatore reale di tensione di f.e.m $\mathbf{V_0}$ e resistenza interna **r**. In queste condizioni il sistema è attraversato da una corrente **I**. 1) Calcolare l'espressione ed il valore della f.e.m. V_0. 2) Sulla superficie di separazione fra i due conduttori si deposita una carica superficiale di densità σ. Calcolare il valore di σ, se diversa da zero, in modulo e segno.

Dati: $\rho_1 = 2\cdot 10^{-7}\,\Omega\,\text{m}$; $\rho_2 = 1\cdot 10^{-7}\,\Omega\,\text{m}$; $L_1 = 2$ **cm** ; $L_2 = 6$ **cm** ; **S = 100** μm^2 ; **r = 1** Ω ; **I = 100 mA.**

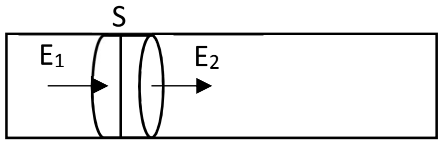
Soluzione

1. La maglia ha equazione $V_0 = IR_T = I(r + R_{1,2}) = I(r + R_1 + R_2)\ \therefore$

dove: $R_{1,2} = R_1 + R_2 = \frac{1}{S}(\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2) = \frac{1}{10^2\cdot 10^{-12}}\,(2\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 10^{-2}) = \frac{10^{-8}}{10^{-1}} = 10^2\ \Omega$

$R_T = r + R_{1,2} = 1 + 100 \cong 100\,\Omega$ (r è trascurabile) ; Quindi: $V_0 = 0{,}1\cdot 100 = 10\ \text{V}\ \therefore$

2. A sinistra e a destra della separazione fra i due conduttori avrò due campi elettrici diversi: $E_{1,2}=\rho_{1,2}\,J$ essendo $J=I/S$



Posso scrivere il teorema di Gauss per un cilindro che passa attraverso la superficie di separazione, vedi figura a lato.

Avrò: $\phi(E)_S = \frac{Q(S)}{\varepsilon_0}$, esplicitando i due membri:

$$\phi(E)_S = S\cdot(E_2 - E_1) = S(\rho_2-\rho_1)\cdot J = S(\rho_2-\rho_1)\frac{I}{S} = (\rho_2-\rho_1)\cdot I$$

$\frac{Q(S)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0}$ da cui si può calcolare la densità superficiale di carica σ: $(\rho_2-\rho_1)\cdot I = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0}$ quindi:

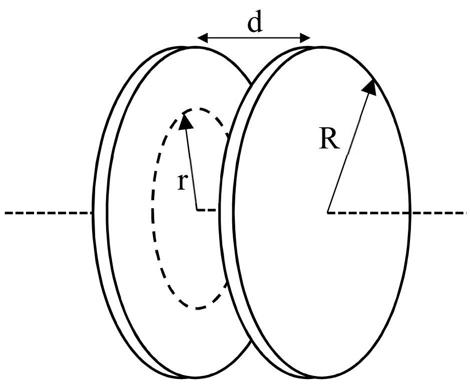
$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{S}(\rho_2-\rho_1)\cdot I \cong \frac{9\cdot 10^{-12}}{10^{-10}}(1\cdot 10^{-7} - 2\cdot 10^{-7})10^{-1} = -9\cdot 10^{-10}\ {}^{C}\!/_{m^2}\quad \therefore$$

2) Anche : $E_S = E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ quindi $\sigma = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \varepsilon_0\left(\frac{V_2}{L_2} - \frac{V_1}{L_1}\right) = \varepsilon_0\left(\frac{IR_2}{L_2} - \frac{IR_1}{L_1}\right) = \frac{\varepsilon_0 I}{S}(\rho_2 - \rho_1)$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un condensatore piano, posto nel vuoto, è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d (vedi figura). Alle armature viene applicata una d.d.p V(t) inizialmente nulla all'istante t=0. All'interno del condensatore si rivela la presenza di un campo magnetico $\overline{B}$.

Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità del campo $\overline{B}$ varia, nei punti con r≤R, secondo la legge: $|\overline{B}(t)| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\,r$. 1) Calcolare l'espressione della d.d.p. ΔV(t) tra le armature del condensatore. 2) Disegnare in modo schematico l'andamento delle grandezze B(t) e ΔV(t) fra t=0 e t =∞.



Soluzione

1. La d.d.p., dentro il condensatore, sarà proporzionale al campo Elettrico: $\Delta V = E \cdot d$, quindi è necessario trovare il campo elettrico E.
Le relazioni che coinvolgono sia il campo elettrico E nel condensatore, che il campo B e la densità della corrente di spostamento J (supponendo di riferirsi ad una circonferenza di raggio r) sono:

$\oint \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 i = \mu_0 \int \overline{J} \cdot \overline{dS}$ mentre la densità della corrente di spostamento è: $\overline{J} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$, quindi avrò:

$\oint \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 i = \mu_0 \int \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \cdot \overline{dS} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \overline{E} \cdot \overline{dS}$ e, per la circonferenza di raggio r, ricordando che $|\overline{B}(t)| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\,r$:

$B(t) \cdot 2\pi r = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(E(t) \cdot \pi r^2) \ \rightarrow \ \frac{2c^2 B(t)}{r} dt = dE(t)$ da cui, integrando:

$E(t) = \int^t \frac{2c^2 B(t)}{r} dt = k\, c^2 \int^t \frac{2t dt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = 2kc^2 \left[\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + c\right]$ il valore della costante c posso trovarlo imponendo che il campo Elettrico all'istante iniziale sia nullo, essendo nullo il campo B che l'ha generato, avrò quindi:

E(0)=0 : $E(0) = -\frac{1}{a} + c = 0$ quindi: $c = \frac{1}{a}$; il campo sarà: $E(t) = 2kc^2 \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right] = \frac{2kc^2}{a}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}}\right]$

E la differenza di potenziale $\Delta V = E \cdot d = \frac{2kc^2 d}{a}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}}\right]$ $\therefore$

NOTA: Nel testo è scritto "Alle armature viene applicata una d.d.p V(t)... All'interno del condensatore si rivela la presenza di un campo magnetico $\overline{B}$". Chi utilizza la relazione $V(t) = -d\phi(B)/dt$ (a parte il fatto che B è perpendicolare alla superficie di C) suppone che l'effetto sia causalmente invertito: che il campo B (variabile nel tempo) generi la d.d.p. V(t). Questo è errato.

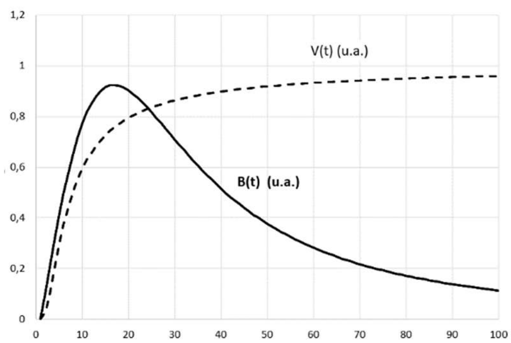
3. Per t=0 ho B(0)=ΔV(0)=0

Per t → ∞ avrò:

B(t=∞) = 0 e $\Delta V(t = \infty) = \frac{2k\ ^2 d}{a}$.

Quindi V(t9 e B(t) partono da zero.

Poi V(t) ha una salita esponenziale verso un asintoto orizzontale, mentre B(t) ha un massimo e poi va a zero.



Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali. Le formule scritte vanno giustificate con qualche parola di spiegazione. Le formule e le considerazioni senza adeguata spiegazione non verranno prese in considerazione. Alcuni valori numerici: $2^{2/3} \cong 1{,}6$; $3^{2/3} \cong 2$; $4^{2/3} \cong 2{,}5$